

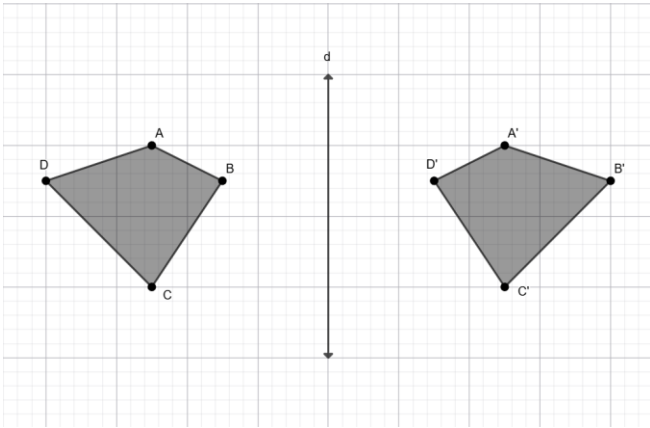
4.1 Geometrik Dönüşümler

Yansıma Dönüşümü

Düzlemde bir şeklin bir doğruya göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü, şekil üzerindeki noktaların verilen doğruya göre simetriği olan noktalar belirlenerek oluşturulur.

Yansıma dönüşümü sırasında:

- Şeklin kenar ve çevre uzunlukları **değişmez**
- Şeklin alanı **değişmez**
- Şeklin açı ölçüleri **değişmez**
- Şekil üzerinde seçilen noktalar arası uzaklık **değişmez**
- Şeklin ve görüntüsünün yansıma doğrusuna uzaklığı **değişmez**



Yukarıdaki şekil ABCD dörtgeninin d doğrusuna göre yansımaya oluşturulan görüntüsü A'B'C'D' dörtgenini göstermektedir

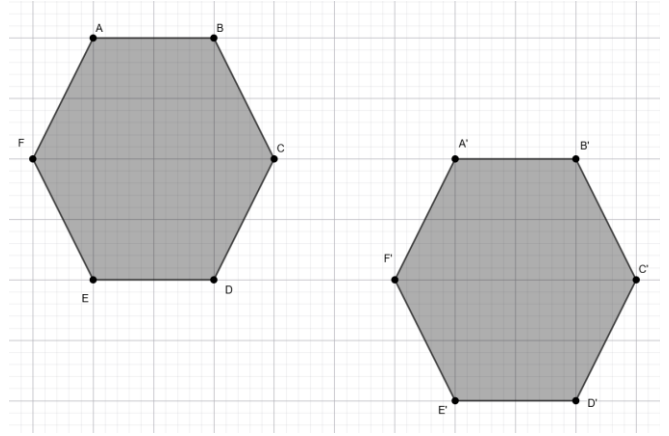
Öteleme Dönüşümü

Düzlemde bir şeklin belirli bir uzaklık ve yönde öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü, şekil üzerindeki tüm noktaların verilen yön ve uzaklıkta ilerletilmesiyle oluşturulur.

Öteleme dönüşümü sırasında:

- Şeklin kenar ve çevre uzunlukları **değişmez**
- Şeklin alanı **değişmez**
- Şeklin açı ölçüleri **değişmez**

- Şekil üzerinde seçilen noktalar arası uzaklık **değişmez**
- Şeklin düzlemdeki yeri **değişir**



Yukarıdaki şekil ABCDEF altgeninin x ekseninde pozitif yönde 6 birim ve y ekseninde negatif yönde 2 birim ötelenmesi ile oluşturulan görüntüsü A'B'C'D'E'F' altgenini göstermektedir

Dönme Dönüşümü

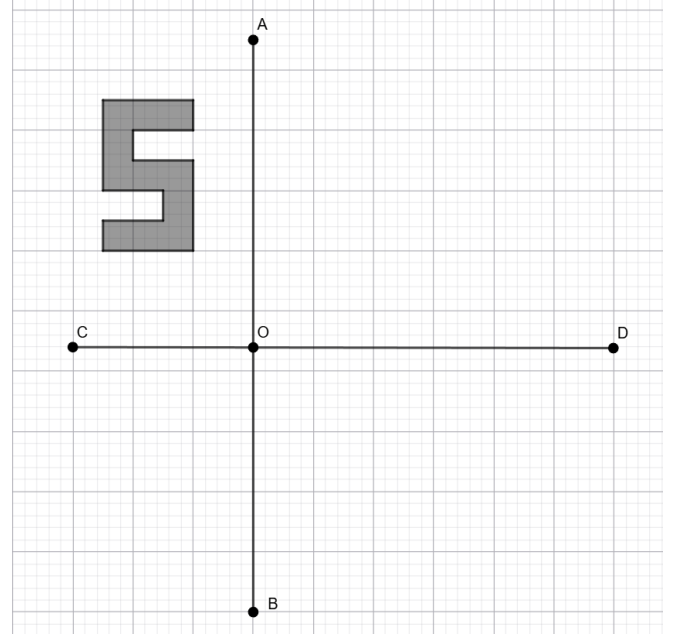
Düzlemde bir şeklin belirli bir noktaya göre verilen bir açı ölçüsünde dönmesi ile görüntünün oluşturulmasına denir. Dönme dönüşümü kesilen doğrulardan birine göre yansıma dönüşümü uygulanarak elde edilen görüntüye, diğer doğruya göre tekrar yansıma dönüşümü uygulandığında elde edilir.

Dönme dönüşümü sırasında:

- Şeklin kenar ve çevre uzunlukları **değişmez**
- Şeklin alanı **değişmez**
- Şeklin açı ölçüleri **değişmez**
- Şekil üzerinde seçilen noktalar arası uzaklık **değişmez**
- Şeklin üzerindeki noktaların dönme merkezine uzaklığı **değişmez**

Örnekler

1)

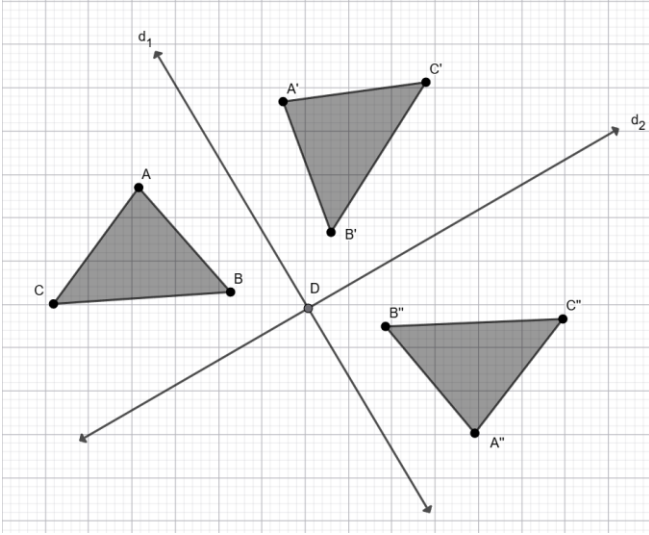


- Yukarıdaki şekli $|AB|$ doğrusuna göre yansıtınız
- Bir önceki aşamada elde ettiğiniz görüntüyü x ekseninde pozitif yönde 3 birim, y ekseninde negatif yönde 5 birim öteleyiniz.
- Bir önceki aşamada elde ettiğiniz şekli önce $|CD|$ doğrusuna, sonra da $|AB|$ doğrusuna göre yansıtarak, O noktasına göre dönme dönüşümünü uygulayınız.

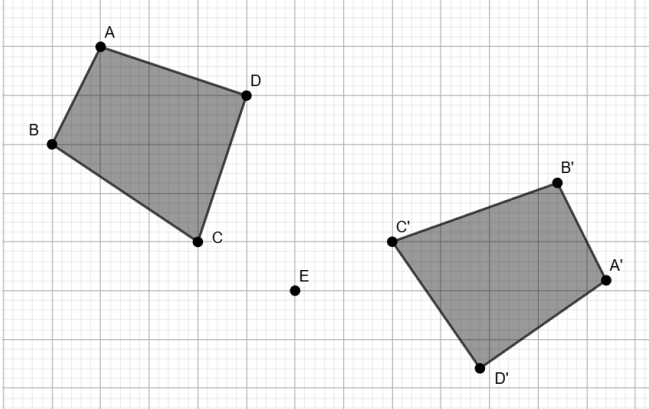
4.2 İki Üçgenin Eş veya Benzer Olması İçin Gerekli Olan Asgari Koşullar

Üçgenlerin Eş Olma Koşulları

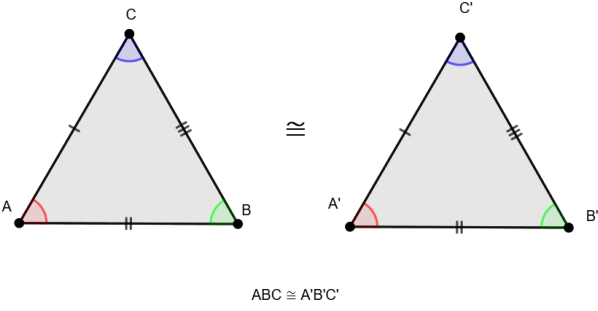
İki üçgenin köşeleri arasında bire bir eşleme yapıldığında üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları ve karşılıklı açılarının ölçüleri eşit ise bu üçgenlere **eş üçgenler** denir. Eşlik " \cong " sembolü ile gösterilir.



Yukarıdaki şekilde ABC üçgeninin d_1 doğrusuna göre yansımaları alınarak oluşturulan görüntüsü $A'B'C'$ üçgeni ve bu üçgenin d_2 doğrusuna göre yansımaları alınarak oluşturulan görüntüsü $A''B''C''$ üçgeni gösterilmiştir. ABC üçgeninin d_1 ve d_2 doğrularının kesişim noktası olan D noktasına göre belirli bir açı ölçüsünde dönmesi ile oluşturulan görüntüsü $A''B''C''$ üçgeni olmaktadır.

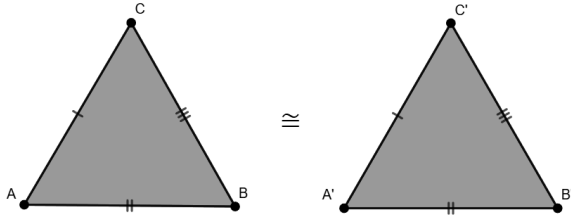


Yukarıdaki şekilde ABCD dörtgeninin E noktasına göre belirli bir açı ölçüsüne göre dönmesi ile oluşan görüntüsü $A'B'C'D'$ dörtgeni gösterilmektedir



Kenar-Kenar-Kenar Eşliği

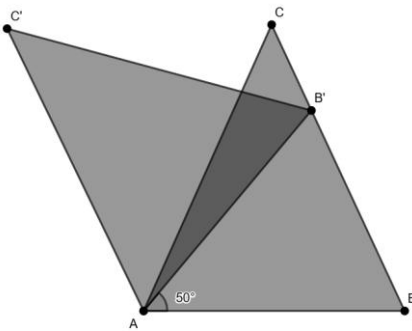
Üç kenar uzunluğu bilinen tek bir üçgen çizilebileceğinden, kenar uzunlukları eşit olan iki üçgen eşittir. Üçgenlerin tüm kenar uzunluklarının eşit olması, üçgenlerin eş olmasının asgari koşullarından biridir. Kenar uzunlukları eşit olan iki üçgenin karşılıklı açı ölçüleri de eşit olur.



Yukarıdaki şekilde karşılıklı kenar uzunluklarının eşit olmasından dolayı kenar-kenar-kenar eşliği sağlanmaktadır.

$ABC \cong A'B'C'$ şeklinde iki üçgenin eş olduğu gösterilir.

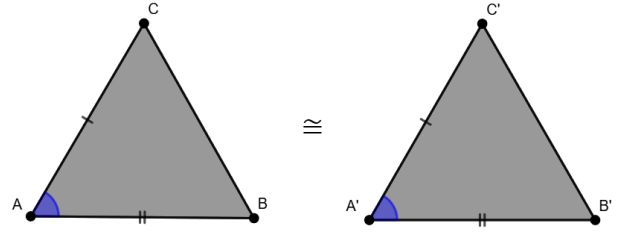
Örnek



Yukarıdaki şekilde ABC üçgeni A köşesinden saat yönünün tersinde 50° döndüğünde B noktası B' noktasına, C noktası C' noktasına gelmektedir. B' noktası |BC| üzerinde ve CAB açısı 70° olduğuna göre $CC'B'$ açısı kaç derecedir?

Kenar-Açı-Kenar Eşliği

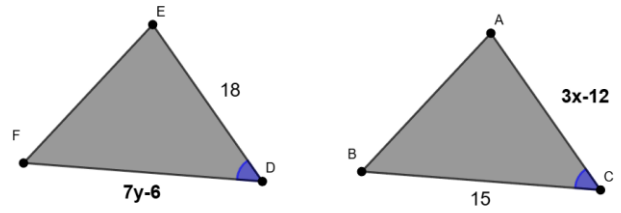
İki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açı ölçüsü bilinen tek bir üçgen çizilebileceğinden, iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açı ölçülerinin eşit olan iki üçgen eşittir. Üçgenlerin karşılıklı iki kenarının uzunluğunun ve bu kenarlar arasındaki açı ölçülerinin eşit olması, üçgenlerin eş olmasının asgari koşullarından biridir. Eş olan bu üçgenlerin karşılıklı açıları ve üçüncü kenarları da eşittir.



Yukarıdaki şekilde A ve A' açıları ile bu açıları oluşturan |AC|, |AB| ve |A'C'|, |A'B'| kenarlarının eşit olmasından dolayı kenar-açı-kenar eşliği sağlanmaktadır.

$ABC \cong A'B'C'$ şeklinde iki üçgenin eş olduğu gösterilir.

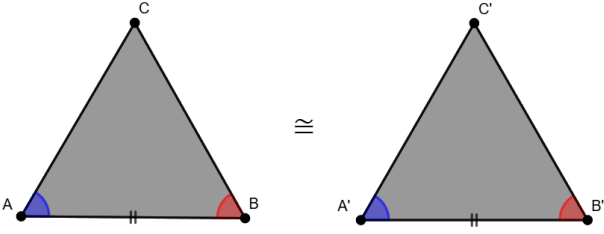
Örnek



Yukarıdaki şekilde $EFD \cong ABC$ olduğuna göre $x + y = ?$

Açı-Kenar-Açı Eşliği

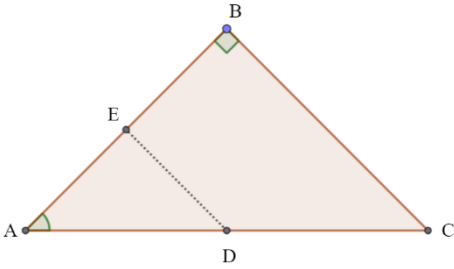
Üç açısının ölçüsü bilinen sonsuz tane üçgen çizilebileceğinden iki üçgenin karşılıklı açılarının ölçülerinin eşit olması, üçgenlerin eş olması için yeterli değildir. Karşılıklı ikişer açı ölçüsünün ve bir kenar uzunluğunun eşit olması, iki üçgenin eş olması için gereken asgari koşullardan biridir.



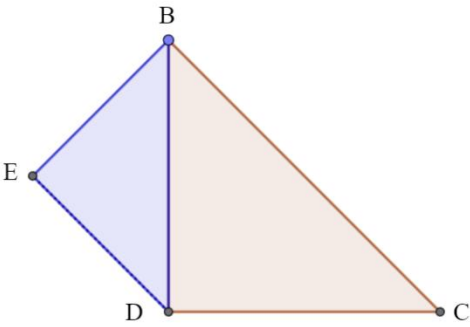
Yukarıdaki şekilde $|AB|$ ve $|A'B'|$ kenarları ile bu kenarlara bağlı A, B ve A', B' açılarının eşit olmasından dolayı açı-kenar-açı eşliği sağlanmaktadır.

$ABC \cong A'B'C'$ şeklinde iki üçgenin eş olduğu gösterilir.

Örnek



Yukarıda verilen ABC üçgeninin A köşesi $[ED]$ doğru parçası boyunca katlandığında aşağıdaki şekil oluşmaktadır.

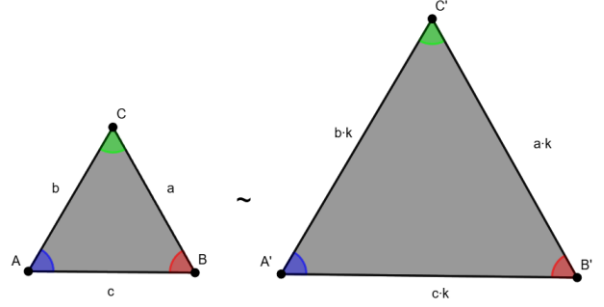


Şekil katlandıktan sonra A ve B köşeleri çakışmaktadır. Ayrıca ABC açısının dik olduğu ve EAD açısının 37° olduğu bilinmektedir.

Buna göre BDC açısı kaç derecedir?

Üçgenlerin Benzer Olma Koşulları

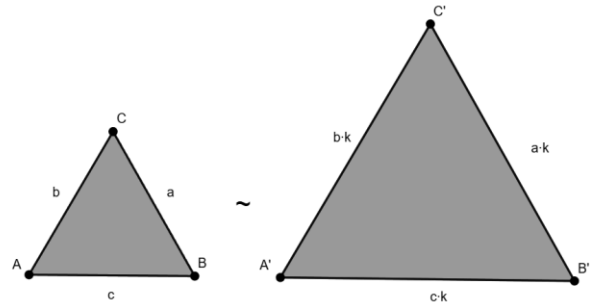
İki üçgenin karşılıklı açıları eş ve bu açıların karşısındaki kenar uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzerdir. Benzerlik “ \sim ” sembolü ile gösterilir.



$$ABC \sim A'B'C'$$

Kenar-Kenar-Kenar Benzerliği

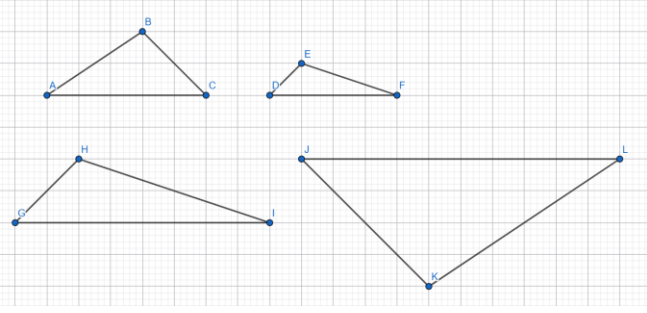
İki üçgenin karşılıklı üç kenar uzunluğu orantılı ise bu üçgenler benzerdir. Karşılıklı üç kenar uzunluğunun orantılı olması, iki üçgenin benzer olması için gereken asgari koşullardan biridir.



Yukarıdaki şekilde ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin karşılıklı kenarlarının uzunlukları k sayısı ile orantılı olduğundan dolayı iki üçgen arasında kenar-kenar-kenar benzerliği sağlanmaktadır.

$ABC \sim A'B'C'$ şeklinde iki üçgenin benzer olduğu gösterilir.

Örnek

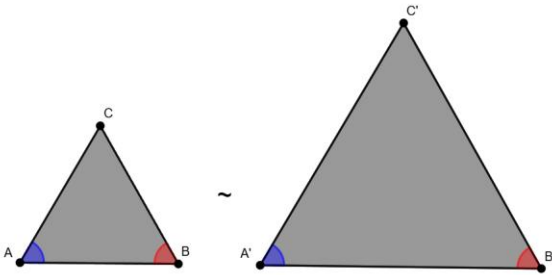


Yukarıdaki şekilde hangi üçgenlerin benzer olduğunu benzerlik sembolünü kullanarak sembolik olarak ifade ediniz.

Bu üçgenlerin benzer olma sebeplerini açıklayınız.

Açı-Açı Benzerliği

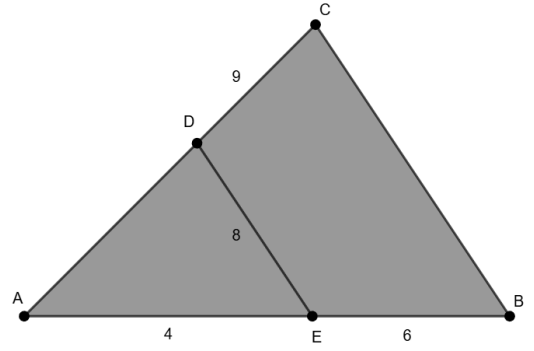
İki üçgenin karşılıklı iki açısı eş ise bu üçgenler benzerdir. Karşılıklı iki açısının eş olması, iki üçgenin benzer olması için gereken asgari koşullardan biridir. Karşılıklı iki açısının ölçüsü eşit olan üçgenlerin üçüncü açı ölçüleri de eşittir ve karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır.



Yukarıdaki şekilde ABC ve A'B'C' üçgenlerinin A, B ve A', B' açılarının eşit olmasından dolayı açı-açı benzerliği sağlanmaktadır.

$ABC \sim A'B'C'$ şeklinde iki üçgenin benzer olduğu gösterilir.

Örnek

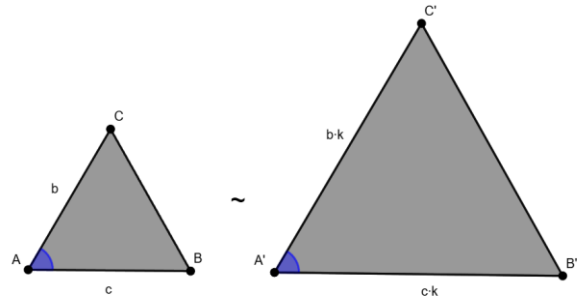


Yukarıdaki şekilde $|DE| \parallel |CB|$ olduğu bilinmektedir.

Buna göre $|AD|$ ve $|CB|$ uzunlukları kaç birimdir.

Kenar-Açı-Kenar Benzerliği

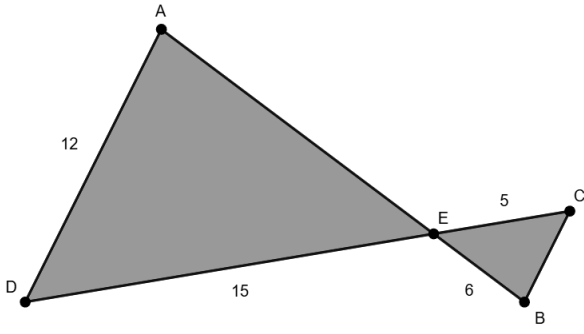
İki üçgenin karşılıklı iki kenar uzunluğu orantılı ve bu kenarların oluşturduğu açılar eş ise bu üçgenler benzerdir. Karşılıklı iki kenar uzunluğunun orantılı ve bu kenarlar arasındaki açı ölçülerinin eşit olması, iki üçgenin benzer olması için gereken asgari koşullardan biridir.



Yukarıdaki şekilde ABC ve A'B'C' üçgenlerinin A ve A' açılarının eşit olması ile $|AB|$, $|AC|$ ve $|A'B'|$, $|A'C'|$ kenarlarının k sayısı ile orantılı olduğundan kenar-açı-kenar benzerliği sağlanmaktadır.

$ABC \sim A'B'C'$ şeklinde iki üçgenin benzer olduğu gösterilir.

Örnek

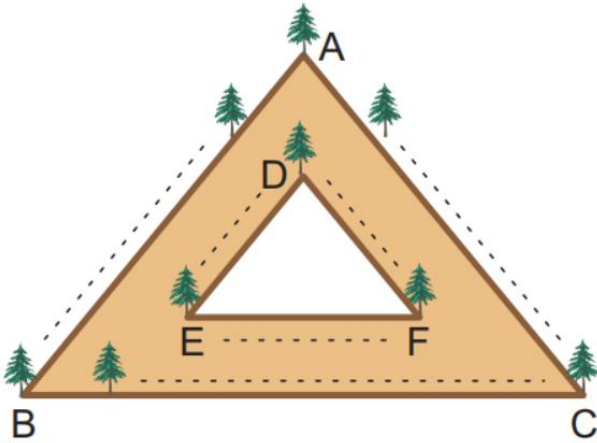


Yukarıdaki şekilde $|AD| \parallel |BC|$ olduğu bilinmektedir.

Buna göre $\frac{|BC|}{|AE|}$ oranı kaçtır?

Alıştırmalar

1)

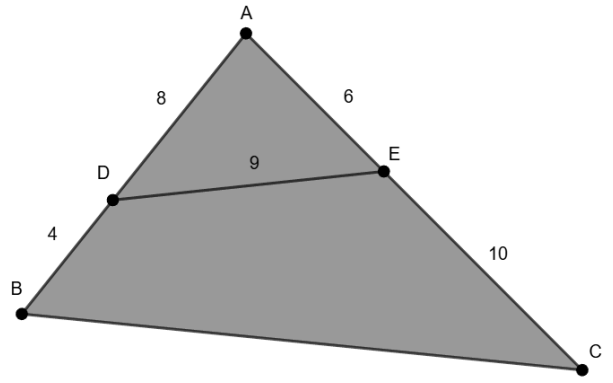


Yukarıdaki şekilde karşılıklı kenarları birbirine paralel ve iç içe iki üçgen arasında kalan bölgeden oluşan yürüyüş yolu gösterilmiştir.

Bu yola, A ve D köşelerinden başlayarak üçgenlerin kenarları boyunca üçer metre aralıklarla ağaç dikilmiştir.

$|AB|$ kenarında 40 ağaç, $|AC|$ kenarında 50 ağaç, $|BC|$ kenarında 70 ağaç ve $|DF|$ kenarında 10 ağaç dikildiğine göre, DEF üçgeninin çevresi kaç metredir?

2)

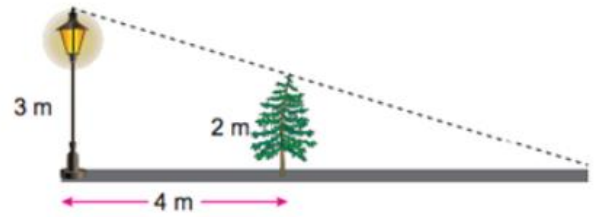


Yukarıdaki görselde $|AD|=8$ birim, $|DB|=4$ birim, $|DE|=9$ birim, $|AE|=6$ birim ve $|EC|=10$ birim olarak verilmiştir. Buna göre

- I. ADE üçgeni ve ABC üçgenleri benzer üçgenlerdir
- II. $m(\angle ADE)=m(\angle ACB)$
- III. $|BC|=18$ birim

İfadelerinden hangisi/hangileri doğrudur?

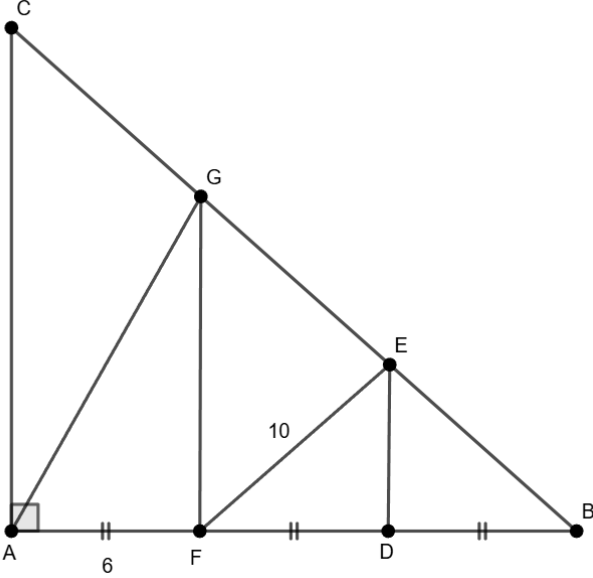
3)



Yukarıdaki şekilde zemine dik yerleştirilen 3 metre uzunluğundaki sokak lambası ile 2 metre uzunluğundaki ağacın arasındaki mesafe 4 metre olarak verilmiştir. Buna göre lamba açıldığında ağacın gölgesinin uzunluğu kaç metre olur?

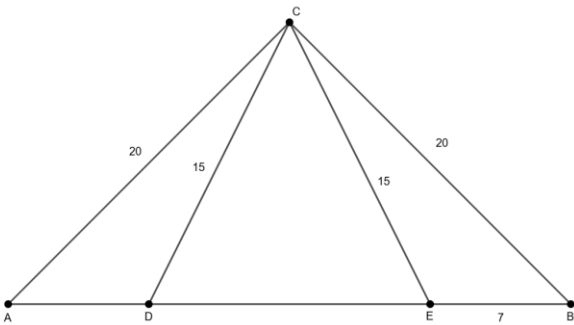
4.3 Bir Üçgenden Hareketle Ona Benzer Üçgenler Oluşturma

1.



Yukarıdaki şekilde CAB açısı dik açı, $|FD|=|DB|=|AF|=6$ birim, $|FE|=10$ birim olarak verilmiştir. $|AC| \parallel |GF| \parallel |ED|$ olduğuna göre, $|CA|$ uzunluğu kaç birimdir?

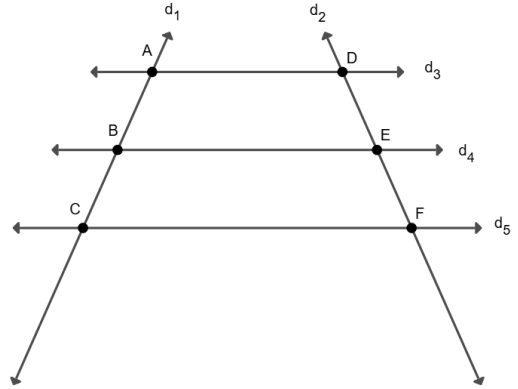
2.



Yukarıdaki şekilde ACB ve DCE ikizkenar üçgenleri verilmiştir. $|AC|=|CB|=20$ birim, $|CD|=|CE|=15$ birim ve $|BE|=7$ birim olduğuna göre $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

4.4 Tales, Öklid ve Pisagor Teoremleri

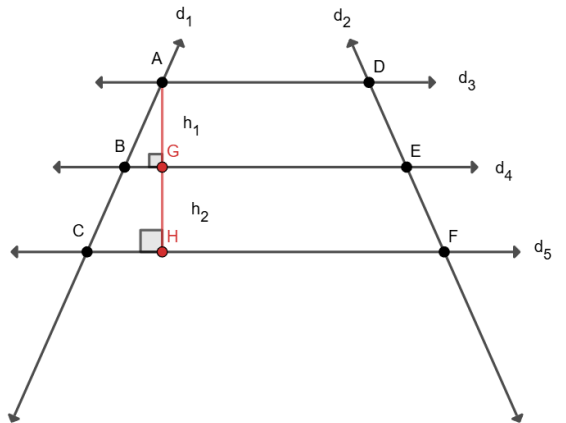
Tales Teoremi



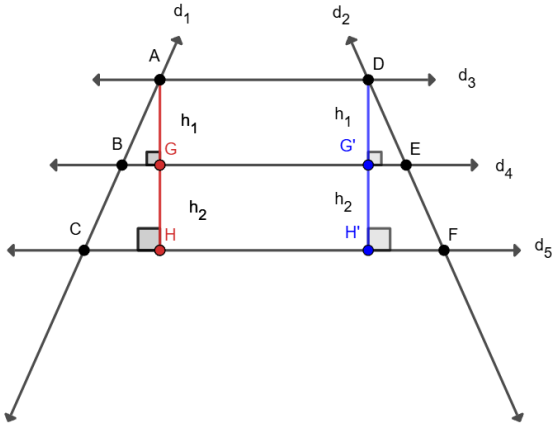
Yukarıdaki şekilde $d_3 \parallel d_4 \parallel d_5$ olacak şekilde verilen doğruları kesen d_1 ve d_2 doğruları verilmiştir. Bu durumda $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ olur.

Kanıt

A noktasından d_5 doğrusuna bir dikme çizilerek, çizilen doğru ile d_4 doğrusunun kesişimi G noktası, d_5 doğrusu ile kesişimi H noktası olarak adlandırılır. ABG ve ACH benzer üçgenleri kullanılarak $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{h_1}{h_2}$ eşitliği elde edilir.



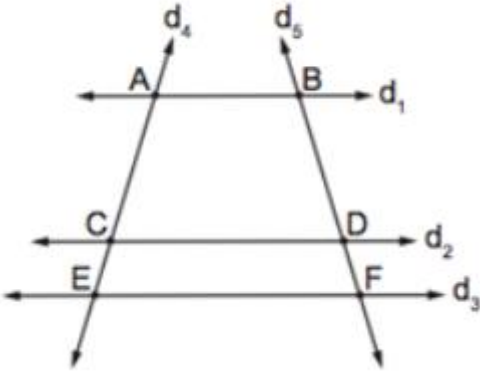
Sonrasında paralel doğrulardan yararlanılarak aynı işlemler şeklin diğer tarafında gerçekleştirilerek aşağıdaki şekil oluşturulur.



Bu durumda $DH'F$ ve $DG'E$ benzer üçgenleri kullanarak $\frac{|DE|}{|EF|} = \frac{h_1}{h_2}$ eşitliği elde edilir.

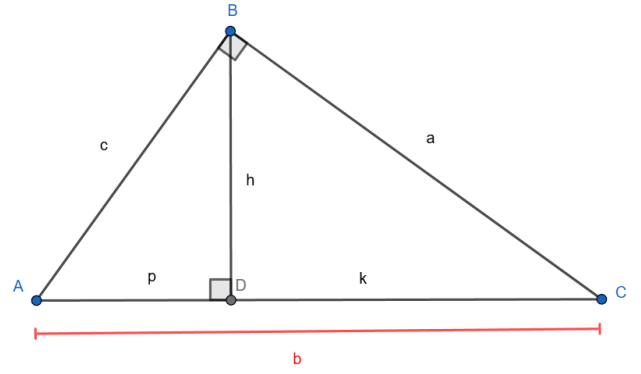
Elde edilen eşitlikler $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{|DE|}{|EF|}$ şeklinde yazılarak $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ eşitliği elde edilir.

Örnek



Yukarıdaki şekilde birbirine paralel d_1, d_2 ve d_3 doğrularını d_4 doğrusu sırasıyla A, C ve E noktalarında, d_5 doğrusu sırasıyla B, D ve F noktalarında kesmektedir. $|AC|=5x$, $|CE|=(x+1)$, $|BD|=18$ birim ve $|DF|=3$ birim olduğuna göre, $|CE|$ uzunluğu kaç birimdir.

Öklid Teoremi

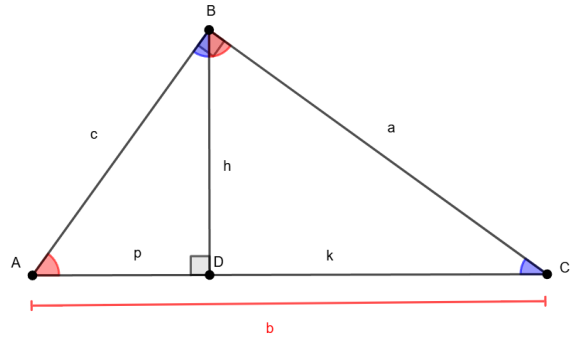


Yukarıdaki şekilde ABC dik üçgeninin B köşesinden $|AB|$ kenarına çizilen dikme gösterilmiştir. Bu durumda Öklid Teoremine göre

$$|BD|^2 = |AD| \cdot |DC| \text{ ya da } h^2 = p \cdot k \text{ olur.}$$

Kanıt

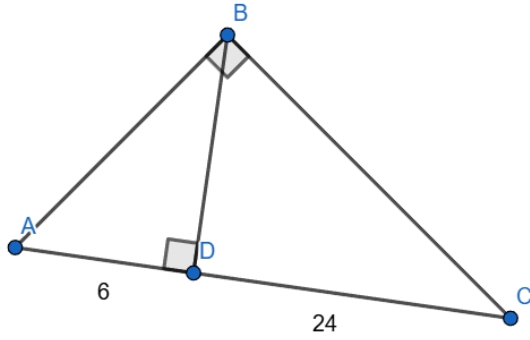
Üçgenin iç açıları düzenlenerek aşağıdaki şekil oluşturulur.



ABD ve BCD benzer üçgenleri kullanarak $\frac{h}{p} = \frac{k}{h}$ eşitliği elde edilir. Eşitlik düzenlenerek

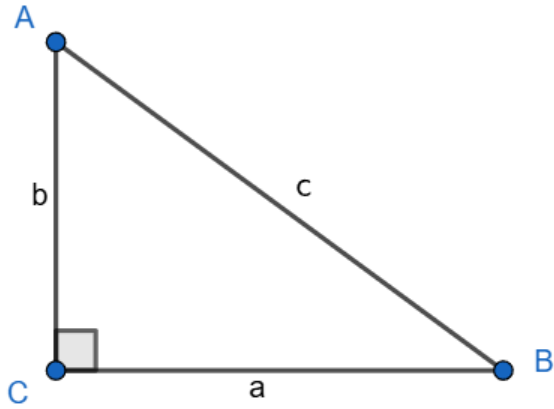
$$h \cdot h = p \cdot k \text{ ya da } h^2 = p \cdot k \text{ eşitliği elde edilir.}$$

Örnek



Yukarıdaki şekilde ABC ve ADB açıları dik açı, $|AD|=6$ birim ve $|DC|=24$ birim olarak verilmiştir. Buna göre $|BC|$ kenarının uzunluğu kaç birimdir?

Pisagor Teoremi



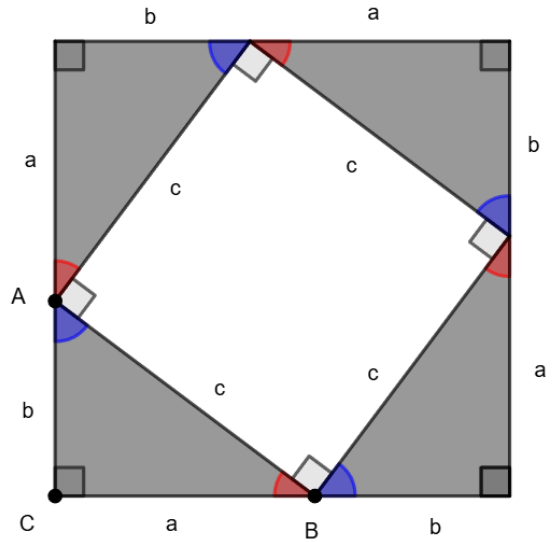
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Yukarıdaki dik üçgende Pisagor teoremine göre dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir.

Kanıt

ABC üçgeni üzerinde gerçekleştirilen geometrik dönüşümler yardımı ile aşağıdaki şekilde görülen

2 kare elde edilir.



Şekilde bulunan büyük karenin alanı $(a + b)^2$ formülü ile, küçük karenin alanı ise c^2 formülü ile bulunur. Büyük karenin alanı küçük karenin alanı ve üçgenlerin alanı ile ifade edildiğinde, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) + c^2$$

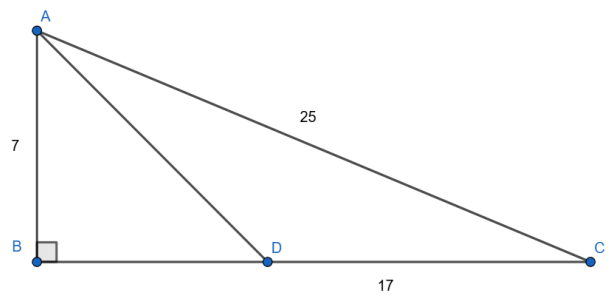
Bu eşitlik açılır ve aşağıdaki şekilde düzenlenirse

$$a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot a \cdot b + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

eşitliği elde edilir.

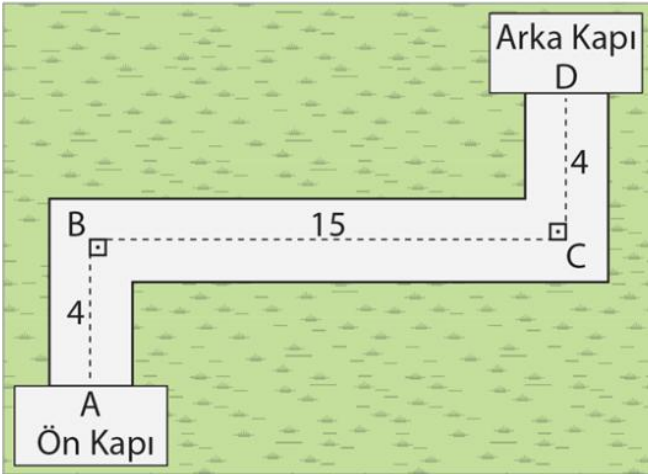
Örnek



Yukarıdaki şekilde ABC açısı dik açı, $|AB|=7$ birim, $|DC|=17$ birim ve $|AC|=25$ birim olarak verilmiştir. Buna göre $|BD|$ uzunluğu kaç birimdir?

Alıştırılmalar

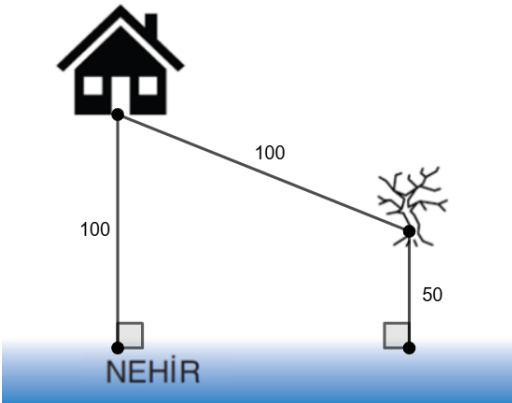
1.



Yukarıdaki şekilde bir parkta bulunan ve bir çıkıştan diğerine uzanan patikanın çizimi verilmiştir. Parka ön kapıdan giren iki arkadaşın biri olan Ahmet patikayı izleyerek arka kapıdan çıkmıştır, diğeri olan Furkan ise çimlerin üzerinden giderek en kısa yolu takip ederek arka kapıdan çıkmıştır.

Buna göre Ahmet, Furkan'dan ne kadar fazla yürümüştür?

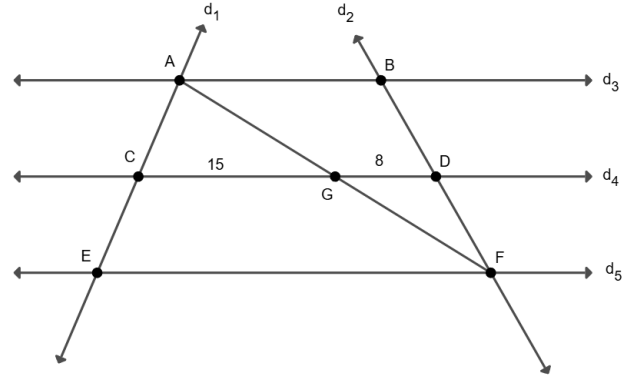
2.



Yukarıdaki şekilde ev ile nehir arası en kısa mesafe 100 metre, ev ile ağaç arası en kısa mesafe 100 metre ve ağaç ile nehir arası en kısa mesafe 50 metre olarak verilmiştir.

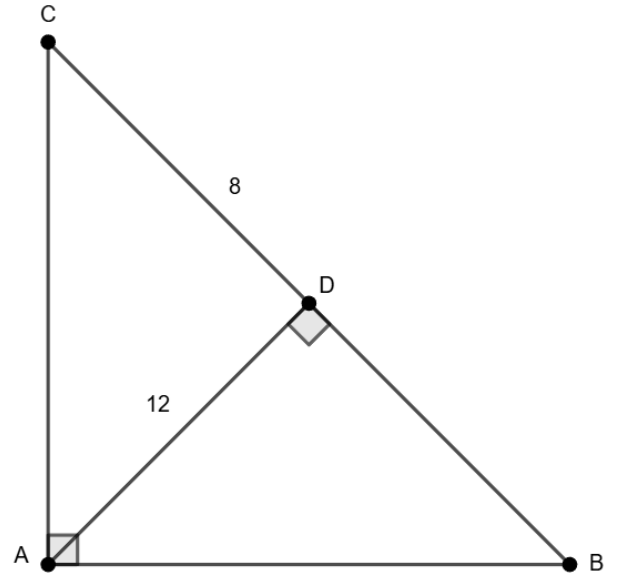
Buna göre evden çıkıp nehirden su alarak ağacı sulamak isteyen biri en az kaç metre yürümek zorundadır?

3.



Yukarıdaki şekilde birbirine paralel d_1, d_2 ve d_3 doğrularını d_1 doğrusu sırasıyla A, C ve E noktalarında, d_2 doğrusu sırasıyla B, D ve F noktalarında kesmektedir. $|GD|=8$, $|GC|=15$ ve $\frac{|AC|}{|EC|} = \frac{5}{4}$ olduğuna göre, $|EF|+|AB|$ kaç birimdir?

4.

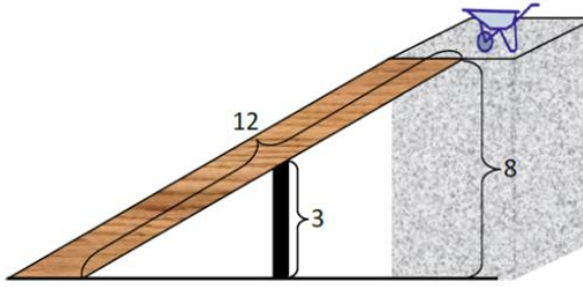


Yukarıdaki şekilde CAB ve ADB dik üçgenleri ile $|CD|=8$ birim ve $|AD|=12$ birim uzunlukları verilmiştir.

Buna göre $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

4.5 Eşlik ve Benzerlikle İlgili Problemler

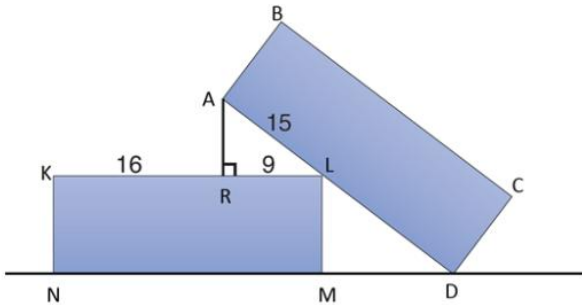
1)



Yukarıdaki şekilde 12 metre uzunluğundaki tahta parçası bir ucu yere, diğer ucu ise 8 metrelik duvarın üzerine degecek şekilde konumlandırılmış ve 3 metrelik bir destek çubuğunun yere dik olacak şekilde yerleştirilmesi ile desteklenmiştir.

Buna göre destek çubuğunun, duvara olan uzaklığı kaç metredir?

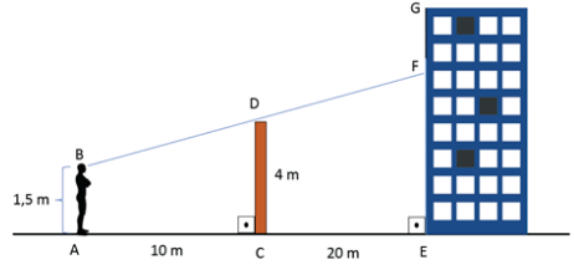
2)



Yukarıdaki şekilde birbirine eş dikdörtgen prizma şeklindeki dengede duran iki konteynerin yandan görünümü verilmiştir.

Buna göre bu konteynerlerden birinin yüksekliği (örneğin $|KN|$ uzunluğu) kaç metredir?

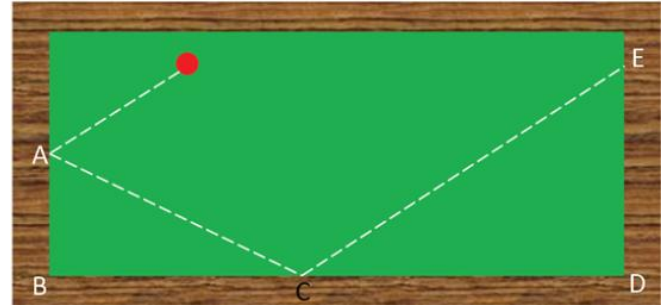
3)



Yukarıdaki şekilde 1,5 metre uzunluğundaki bir çocuk, 4 metre uzunluğundaki duvarın 10 metre gerisinden bakarak, duvarın arkasında bulunan binanın F noktasını görebilmektedir.

Çocuk duvara 5 metre daha yaklaşırsa, duvarın üzerinden yalnızca binanın en yüksek noktası olan G noktasını görebileceğine göre, G ve F noktaları arasındaki mesafe kaç metredir?

4)



Yukarıdaki şekilde dikdörtgen şeklindeki bilardo masasında kırmızı topun hareket ettiği rota çizilmiştir. Top bilardo masasının kenarlarına her çarptığında, geldiği açı ile hareketine devam etmiştir.

$|AB|=60$ cm, $|BC|=100$ cm ve $|CD|=120$ cm olduğuna göre, $|DE|$ uzunluğu kaç santimetredir?